중학교 2학년 수학 < 물댄동산 >

8 - 가

8 - 나

나. 1 확 률

나. 1-1 경우의 수와 확률

[1] 사건과 경우의 수

(1) 사건 : 반복할 수 있는 실험이나 관찰에 의하여 일어나는 결과
(2) 경우의 수 : 어떤 사건이 일어나는 경우의 가짓수

[2] 합의 법칙, 곱의 법칙

사건 A가 일어날 수 있는 경우의 수가 m가지이고, 사건 B가 일어날 수 있는 경우의 수가 n가지일 때,
(1) 합의 법칙 : 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수 $= m+n$ 가지
or, 또는 , 이거나
(2) 곱의 법칙 : 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수 $= m\times n$ 가지
and, 동시에, ~이고, ~이면서

[3] 여러 가지 경우의 수

(1) n개의 동전을 던질 때 : 2^n
(2) n개의 주사위를 던질 때 : 6^n
(3) n명이 한 줄로 서는 경우 : $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$
(4) n명 중 3명을 뽑는 세우는 경우의 수 : n x (n-1) x (n-2)
(5) 1,2,3,4,5 카드로 두자리 정수를 만드는 경우의 수 : 5 x 4
(6) 0,1,2,3,4,5 카드 중 두자리 정수를 만드는 경우의 수 : 5 x 5
(7) n명 중 2명을 뽑는 경우의 수 : $\frac{n(n-1)}{2\times1}$
(8) n명 중 3명의 대표를 뽑는 경우의수 : $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}$
(9) 원 위의 10개의 점에서 삼각형을 만들 경우의 수 : $\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$
(10) 5명이 악수하는 경우의 수 : $\frac{5\times4}{2\times1}$
(11) 5팀이 다른 팀과 경기할 때 총 게임 수 : $\frac{5\times4}{2\times1}$
(12) 흰공 2개 검은공 3개를 일렬로 배열할 경우의 수 : $\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times\times1}$
(13) 이웃 할 때의 경우의 수
- 이웃하는 것을 하나로 묶어서 한 묶음으로 생각한다.
- (한 묶음으로 구한 경우의 수) x (한 묶음 속 자체의 경우의 수)

* 순서 / 서열 있음 : 일렬로 세우는 문제, 자리수에 관한 정수 문제, 직책 구분 대표 뽑는 문제
* 순서 / 서열 없음 : 대표를 구분 없이 뽑는 문제, 원 위의 선분의 개수, 악수 하는 경우, 인사하는 경우, 게임의 수,

[4] 확률의 뜻

사건 A가 일어날 확률 $(p) = \frac{(\text{사건 } A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$

나. 1-2 확률의 계산

[1] 확률의 성질

(1) 어떤 사건이 일어날 확률을 p라고 하면 : $0\le p\le1$
(2) 반드시 일어나는 사건의 확률 $=1$
(3) 절대로 일어날 수 없는 사건의 확률 $=0$

[2] 합의 법칙, 곱의 법칙

사건 A가 일어날 확률이 p이고, 사건 B가 일어날 확률이 q일 때,
(1) 합의 법칙 (or) : 사건 A 또는 B가 일어날 확률 $=p+q$
(2) 곱의 법칙 (and) : 사건 A, B가 동시에 일어날 확률 $=p\times q$

[3] 여사건의 확률

(1) A의 여사건 : 어떤 사건 A가 일어나지 않을 사건
(2) 사건 A가 일어날 확률을 p라 하면, 사건 A가 일어나지 않을 확률 : $q=1-p$

❖ "적어도 ~일 확률을 구하여라." ⇨ 여사건 이용 ("적어도" 반대 ==> "모두")
❖ = 1 - (반대인 사건의 확률)

[4] 여러 가지 확률

(1) 적어도 하나가 앞면일 확률 = 1 - (모두 뒷면일 확률)
(2) 만날 확률, 만나지 못할 확률 => ① 만나지 못할 확률 = 1-(만날 확률)
② (A,B 만날 확률) = (A가 나올 확률) x (B가 나올 확률)
(3) 문제 풀 확률 : (A,B 두 문제 중 한 문제만 풀 확률)
={(A를 풀 확률)X(B를 못풀 확률) + (A가 못풀 확률)X(B를 풀 확률)}
(4) 명중률 :① (2발을 쏘아 적어도 1발을 명중 시킬 확률)
= 1 - (2발 모두 명중 시키지 못할 확률)
② (2발을 쏘아 1발만 명중 시킬 확률)
= {(처음 명중)X(두번째 실패) + (처음 실패)X(두번째 명중)}

나. 2 삼각형의 성질

나. 2-1 명제와 정리

[1] 명제의 뜻

(1) 명제 : 참인지 거짓인지 분명히 알 수 있는 문장
(2) 1 참인 명제 : 예외 없이 언제나 옳은 명제
2 거짓인 명제 : 한 가지 경우라도 거짓이 되는 명제

[2] 명제의 가정과 결론

어떤 명제를 'p이면 q이다.'의 꼴로 나타낼 때, p를 가정, q를 결론이라고 한다.
$p \rightarrow q$ 항상 참일 때 : $P \subset Q$

[3] 명제의 역

명제의 역 : 어떤 명제에서 가정과 결론을 바꾸어 놓은 명제
⇨ 명제 'p이면 q이다.'의 역 : 'q이면 p이다.'

[4] 정의

(1) 정의 : 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장
(2) 자주 나오는 여러 가지 용어의 정의
1 예각삼각형 : 세 각이 모두 예각인 삼각형
2 직각삼각형 : 한 각이 직각인 삼각형
3 둔각삼각형 : 한 각이 둔각인 삼각형
4 이등변삼각형 : 두 변의 길이가 같은 삼각형
5 사다리꼴 : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형
6 평행사변형 : 두 쌍의 대변이 평행한 사각형
7 마름모 : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
8 직사각형 : 네 각의 크기가 모두 같은 사각형
9 정사각형 : 네 변의 길이가 모두 같고, 네 각의 크기도 모두 같은 사각형
10 등변사다리꼴 : 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴
11 원 : 평면 위의 한 점에서 일정한 거리에 있는 점의 집합

SUBNOTE 수학 8 개념요약정리

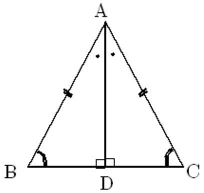
[5] 증명과 정리

(1) 증명 : 정의 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 근거로 하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 것
(2) 정리 : 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것. 용어의 성질

※ 증명할 때 자주 이용되는 정리
(1) 삼각형의 합동 조건
① SSS 합동 : 대응하는 세 변의 길이가 각각 같다.
② SAS 합동 : 대응하는 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 같다.
③ ASA 합동 : 대응하는 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 같다.
(2) 평행선에 대한 정리 : 평행선이 한 직선과 만날 때 ①동위각과 ②엇각의 크기는 서로 같다.
③ 동측내각의 합은 180이다.
(3) 맞꼭지각의 성질 : 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

[6] 이등변삼각형

(1) 이등변삼각형의 정의 : 두 변의 길이가 같은 삼각형
(2) 이등변삼각형의 성질
1 두 밑각의 크기가 서로 같다.
2 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.



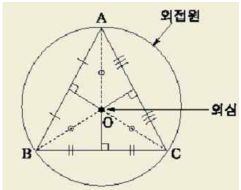
[7] 직각삼각형의 합동조건

(1) 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다. (RHS합동)
(2) 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다. (RHA합동)

* 빗변 : 직삼각형에서 직각의 대변 (대변 : 마주 보는 변(선분))

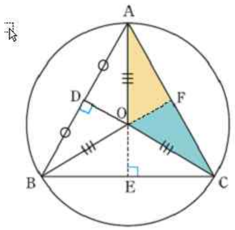
[8] 삼각형의 외심

(1) 외접원 : 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원
(2) 외심
  - 정의 : 삼각형의 외접원의 중심
  - 작도 방법 : 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점
(3) 성질 : 삼각형의 외심에서 세 꼭지점에 이르는 거리는 같다.



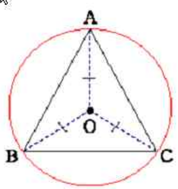
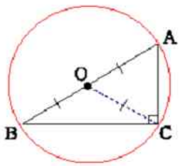
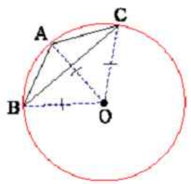
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

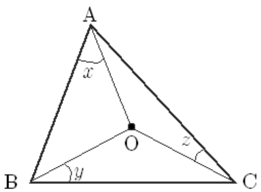
외심의 위치



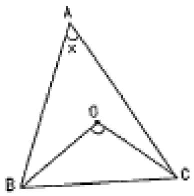
△AFO≡△CFO(SSS 합동)

❖ 1 예각삼각형의 외심의 위치 : 삼각형의 내부
   2 직각삼각형의 외심의 위치 : 빗변의 중점
   3 둔각삼각형의 외심의 위치 : 삼각형의 외부

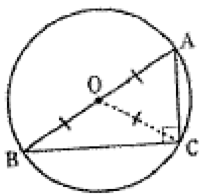
구분 \ 종류	예각삼각형	직각삼각형	둔각삼각형
외심과 외접원			
외심의 위치	삼각형의 내부	빗변의 중점	삼각형의 외부



$\angle x+\angle y+\angle z=90°$



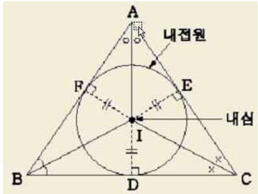
$\angle BOC=2\angle BAC$



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

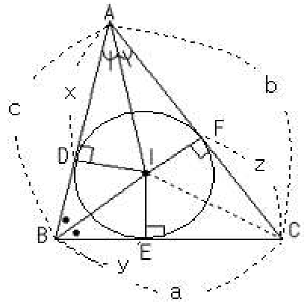
[9] 삼각형의 내심

(1) 내접원 : 삼각형의 세 변에 접하는 원
(2) 내심
  - 정의 : 삼각형의 내접원의 중심
  - 작도 방법 : 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점
(3) 성질 : 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.



$\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$

* 정삼각형 : 내심과 외심이 일치한다.
* 이등변삼각형 : 외심과 내심이 꼭지각은 이등분선 위에 있다.

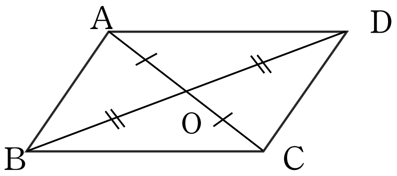


1) $\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A$
2) $x+y=c,\ \ y+z=a,\ z+x=b$
3) $x=\frac{1}{2}(b+c-a),\ y=\frac{1}{2}(a+c-b),\ z=\frac{1}{2}(a+b-c)$
4) $\triangle ABC$의 내접원의 반지름 길이 r라 할 때
   $\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

나. 3 사각형의 성질

3-1 평행사변형

[1] 평행사변형의 성질



(1) 평행사변형의 정의 : 두 쌍의 (대변)이 각각 평행인 사각형 ($\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$)

(2) 평행사변형의 성질

1 두 쌍의 (대변의 길이)는 각각 같다. ($\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$)

2 두 쌍의 (대각의 크기)는 각각 같다. ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$)

3 두 대각선은 서로 다른 것을 (이등분) 한다. ($\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OB} = \overline{OD}$)

∠A + ∠B = (180), ∠D + ∠C = (180) (동측내각의 합)

[2] 평행사변형이 되는 조건

(1) 두 쌍의 (대변)이 각각 평행하다. (정의) ($\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$)

(2) 두 쌍의 (대변의 길이)가 각각 같다. ($\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$)

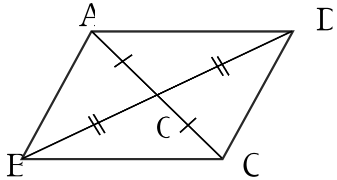
(3) 두 쌍의 (대각의 크기)가 각각 같다. ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$)

(4) 두 대각선이 서로 다른 것을 (이등분)한다. ($\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OB} = \overline{OD}$)

(5) (한 쌍)의 대변이 평행하고 (그 길이)가 같다. ($\overline{AD} // \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$)

SUBNOTE 수학 8 개념요약정리

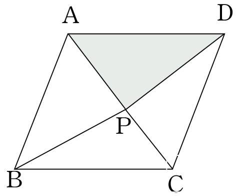
[3] 평행사변형과 넓이



평행사변형의 두 대각선에 의해서 만들어지는 4개의 삼각형들의 (넓이)가 서로 같다.

$\triangle ABO = \triangle BCO = \triangle CDO = \triangle DAO$

$= 1/4 \ \square ABCD$

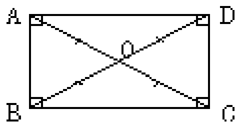


$\triangle ABP + \triangle CDP = \triangle ADP + \triangle BCP$

$= 1/2 \ \square ABCD$

3-2 여러 가지 사각형

[1] 직사각형



(1) 직사각형의 정의 : 네 (내각의 크기)가 같은 사각형 ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$)

(2) 직사각형의 성질 : 두 대각선의 (길이)가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

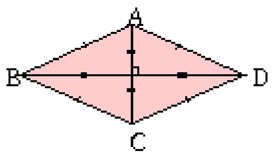
($\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{OA} = \overline{OC}$ = $\overline{OB} = \overline{OD}$)

(3) 평행사변형에서 직사각형이 되는 조건

1 한 내각의 크기가 직각 일 때 ($\angle A = 90^\circ$)

2 두 대각선의 길이가 같을 때 ($\overline{AC} = \overline{BD}$)

[2] 마름모



(1) 마름모의 정의 : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형 ($\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{BC} = \overline{AD}$)

(2) 마름모의 성질 : 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.

($\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$)

대각선은 한 내각을 이등분한다.

(3) 평행사변형에서 마름모가 되는 조건

1 이웃하는 두 변의 길이가 같을 때 (AB = BC), 대각선이 한 내각을 이등분한다.

2 두 대각선이 서로 직교할 때 ($\overline{AC} \perp \overline{BD}$)

[3] 정사각형

(1) 정사각형의 정의 : 네 변의 길이와 네 각의 크기가 각각 같은 사각형

(2) 정사각형의 성질 : 두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 수직이등분한다.

(3) 정사각형이 되는 조건 : 직사각형이 될 조건과 마름모가 될 조건을 동시에 만족하는 사각형은 정사각형이 된다.

[4] 사다리꼴

(1) 사다리꼴 : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

(2) 등변사다리꼴 : 한쌍의 대변이 평행하고, 아랫변의 양끝각의 크기가 같은 사다리꼴

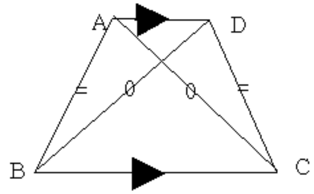
(3) 등변사다리꼴의 성질

1 평행이 아닌 한 쌍의 대변의 길이가 서로 같다.

2 윗변의 양 끝각의 크기가 서로 같다.

3 두 대각선의 길이가 서로 같다.

* 정사각형, 직사각형은 모두 등변 사다리꼴이다.

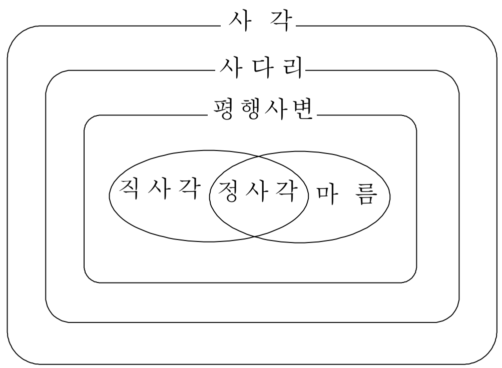


$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$

$\overline{BD} = \overline{AC}$

$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle B + \angle D = \angle C + \angle A = 180^\circ$

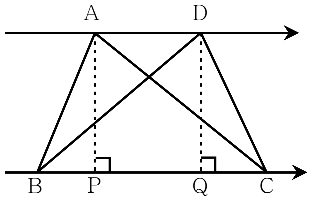
[5] 여러 가지 사각형



A D

[6] 평행선과 넓이

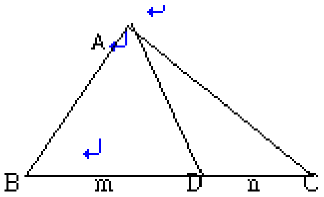
밑변이 공통이고 높이가 같은 두 삼각형의 넓이는 서로 같다.



: $\overline{AD} /\!/ \overline{BC} \Leftrightarrow \triangle ABC = \triangle DBC$, $\triangle OAB = \triangle OCD$

[7] 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비

- 높이가 같은 두 삼각형에서 넓이의 비 = 밑변의 길이의 비와 같다.



$\triangle ABD = \triangle ADC = m : n$

[8] 중점을 연결하여 만든 사각형

- 사각형의 중점 연결 => 평행사변형 / 평행사변형 중점 연결 => 평행사변형
- 직사각형 중점 연결 => 마름모 / 마름모 중점 연결 => 직사각형
- 정사각형 중점 연결 => 정사각형 / 등변사다리꼴 중점연결 => 마름모

SUBNOTE 수학 8 개념요약정리

O

나-4. 도형의 닮음

4-1 도형의 닮음

[1] 닮은 도형과 닮음의 성질

(1) 닮음 : 한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소한 것이 다른 도형과 합동이 될 때, 두 도형은 서로 '닮음인 관계에 있다' 또는 '닮았다'고 한다.

(2) 닮은 도형

: 서로 닮음인 관계에 있는 두 도형을 '닮은 도형' 또는 '닮은꼴'이라고 한다.

(3) 닮음의 기호 : 두 도형 P와 Q가 닮은꼴이다. ⇔ $P \backsim Q$

(4) 닮음의 성질

1 대응하는 변의 길이의 비는 일정하다. 2 대응하는 각의 크기는 서로 같다.

[2] 닮음비

(1) 닮음비 : 두 닮은 도형에서 대응하는 변의 길이의 비

(2) 닮음비의 값 : 닮음비가 $a : b$일 때, 닮음비의 값 $= \frac{a}{b}$

[3] 닮음의 위치

(1) 닮음의 위치 : 두 닮은 도형의 대응하는 점을 연결한 직선이 한 점 O에서 만날 때, 두 도형은 닮음의 위치에 있다고 한다.

(2) 닮음의 중심 : 점 O를 닮음의 중심이라고 한다.

(3) 닮음의 위치에 있는 도형의 성질

1 대응하는 변은 서로 평행하다.

2 닮음의 중심으로부터 대응하는 점까지의 거리의 비는 일정하고, 이것은 닮음비와 같다.

[4] 삼각형의 닮음 조건

(1) SSS 닮음 : 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

(2) SAS 닮음

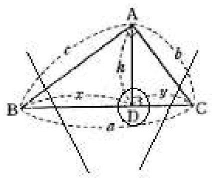
: 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때

(3) AA 닮음 : 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

[5] 직각삼각형의 닮음

(1) 직각 이외의 다른 한 각이 같으면 닮음이다.

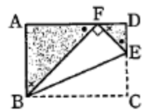
(2) 다음 그림과 같은 직각삼각형에서 $\triangle ABC \backsim \triangle HAC \backsim \triangle HBA$ 이므로



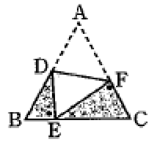
1 $c^2 = a \cdot x$ 2 $b^2 = a \cdot y$

3 $h^2 = x \cdot y$ 4 $b \cdot c = a \cdot h$

5 $a^2 = b^2 + c^2$



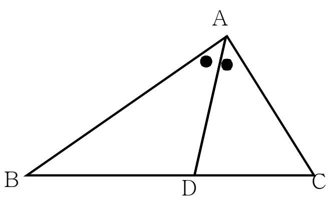
□ABCD가 직사각형일 때
△ABF∽△DFE

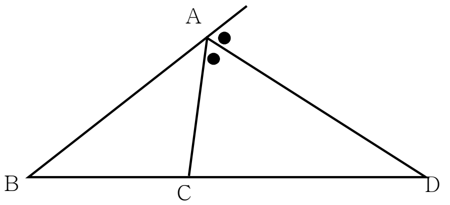


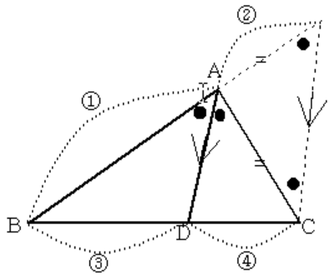
△ABC가 정삼각형일 때
△BED∽△CFE

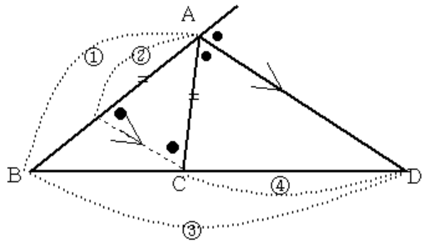
[6] 삼각형의 각의 이등분선과 변의 길이

다음 그림에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$









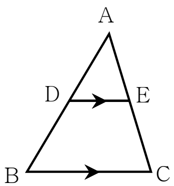
4-2 닮음의 응용

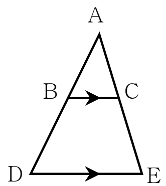
[1] 삼각형과 평행선

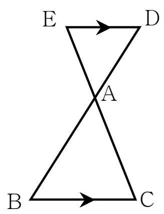
다음 그림에서 $\overline{DE} /\!/ \overline{BC}$
일 때

(1) $\overline{AD} : \overline{AB}$
$= \overline{AE} : \overline{AC}$
$= \overline{DE} : \overline{BC}$

(2)
$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$

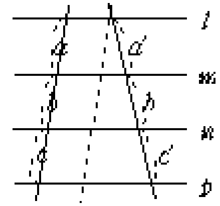






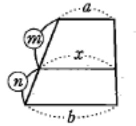
[2] 평행선 사이의 선분의 길이의 비

다음 그림에서 $l /\!/ m /\!/ n /\!/ p$일 때,

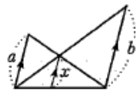


$a : a' = b : b' = c : c'$

$a : (a+b) = a' : (a+b)' = c : c'$

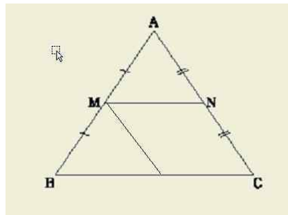


$x = \frac{bm+an}{m+n}$

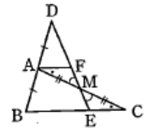


$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

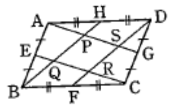
[3] 삼각형의 중점 연결 정리



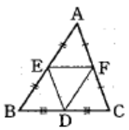
$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{MN} /\!/ \overline{BC}$



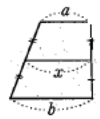
① $\overline{AF} = \overline{CE}$
② $\overline{BE} = 2\overline{CE}$
③ $\overline{BC} = 3\overline{CE}$
④ $\overline{ME} = \frac{1}{4}\overline{DE}$



〈공식처럼 암기〉
① $\overline{BQ} : \overline{QP} : \overline{PH}$
$= 2 : 2 : 1$
② □PQRS는 평행사변형
③ △APH
$= \frac{1}{20}$□ABCD
④ □PQRS
$= \frac{1}{5}$□ABCD



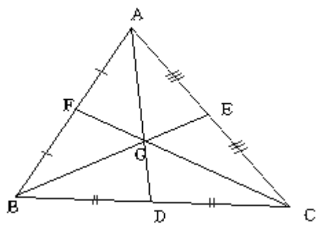
(△DEF의 둘레의 길이)
$= \frac{1}{2} \times$ (△ABC의 둘레의 길이)



$x = \frac{1}{2}(a+b)$

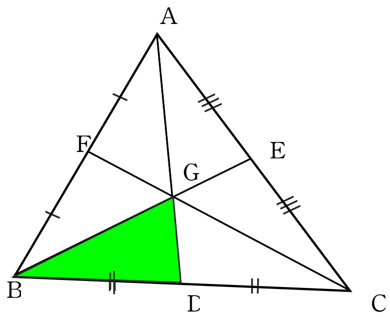
4] 삼각형의 중선

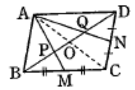
(1) 중선 : 삼각형의 한 꼭지점과 그 대변의 중점을 이은 선분 (한 삼각형에는 세 개의 중선이 있다.)
(2) 중선의 성질 : 중선은 삼각형의 넓이를 이등분한다.



[5] 삼각형의 무게중심

(1) 삼각형의 무게중심 : 삼각형의 세 중선의 교점
(2) 삼각형의 무게중심의 성질
  1 세 중선의 길이를 각 꼭지점으로부터 $2:1$로 나눈다.
  2 세 중선으로 나누어지는 6개의 삼각형의 넓이는 서로 같다.





① 점 P는 △ABC의 무게중심
② 점 Q는 △ACD의 무게중심
③ $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QD}$
④ $\overline{PO}=\overline{QO}=\frac{1}{6}\overline{BD}$
⑤ $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}$
⑥ $\overline{PQ}:\overline{MN}=2:3$

[6] 닮은 도형의 넓이의 비와 부피의 비

닮음비(길이의 비)가 $m:n$일 때,
(1) 둘레의 비 $= m:n$
(2) (겉)넓이의 비 $= m^2:n^2$
(3) 부피의 비 $= m^3:n^3$

SUBNOTE 수학 8 개념요약정리

[7] 축척

(1) 축도 : 축소하여 그린 그림
(2) 축척 : 도형을 줄인 비율 $=\dfrac{(\text{축도에서의 길이})}{(\text{실제 길이})}$
  - 단위 : cm, 1m =100cm, 1km = 1000m = 100000cm